Fen-Edebiyat Fakültesi	**FİNAL SINAV KAĞIDI**	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Kısmi Türevli Denklemler	
İmza:	Sınav Tarihi: 19 Ocak 2024	

Süre 75dk.

d'Alambert çözümü: $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi$.

Isı denkleminin çözümü: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) e^{-k(n\pi/L)^2 t}$, $\quad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\,dx$.

1. (20 puan)

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$
$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
$$u_t(x,0) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümünü $(x,t) = (0, \frac{1}{2})$'de hesaplayın.

$u(0, 1/2) =$

Çözüm: $u\left(0,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(0+\frac{1}{2}\right)+f\left(0-\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\int_{0-1/2}^{0+1/2} g(s)\,ds = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} s\,ds = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

2. (30 puan) $z_{xx} + z_{yy} = xy^2 + 8e^{-2x}$ denkleminin özel bir çözümünü ters görüntü yöntemiyle elde edin.

$z(x,y) =$

Çözüm: $L = D_x^2 + D_y^2$, $Lz_1 = xy^2$, $Lz_2 = 8e^{-2x}$. $z_2 = Ae^{-2x}$, $Lz_2 = 4Ae^{-2x}$, $A = 2$, $z_2 = 2e^{-2x}$.

$$z_1 = \frac{1}{D_x^2}\frac{1}{1+\frac{D_y^2}{D_x^2}}\left(xy^2\right) = \left(xy^2 - \frac{D_y^2}{D_x^2}(xy^2) + \left(\frac{D_y^2}{D_x^2}\right)^2 (xy^2) + \cdots\right) = \frac{1}{D_x^2}\left(xy^2 - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3y^2}{6} - \frac{x^5}{60}$$

$$z = z_1 + z_2 = \frac{x^3y^2}{6} - \frac{x^5}{60} + 2e^{-2x}$$

3. (20 puan)

$$u_t = 2u_{xx}$$

$$u(x,0) = 4\sin(x) - \sin(4x)$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

başlangıç sınır değer probleminin çözümünü $(x,t) = (\frac{\pi}{2}, 1)$ değeri için bulun.

$u(\frac{\pi}{2}, 1) =$

Çözüm: $u(x,t) = 4\sin(x)e^{-2\cdot 1^2 t} - \sin(4x)e^{-2\cdot 4^2 t}$, $u(\pi/2, 1) = 4e^{-2}$

4. (30 puan)

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0,$$

denklemini (a) sınıflandırın ve (b) kanonik forma dönüştürün.

Kanonik Formu:

Çözüm: (a) $A = 1$, $B = 2$, $C = 4$, $B^2 - AC = 0$. Denklem paraboliktir.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-B}{A} = -2$$

$$\frac{dy}{dx} + \lambda_1 = 0 \implies \xi = y - 2x$$

$\eta = x$ seçelim.

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = -1 \neq 0$$

$u_x = -2u_\xi + u_\eta$, $u_{xx} = 4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$, $u_y = u_\xi$, $u_{yy} = u_{\xi\xi}$, $u_{xy} = -2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}$.

$$0 = \left(4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right) + 4\left(-2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\right) + 4u_{\xi\xi}$$

Kanonik form:

$$u_{\eta\eta} = 0$$